ЗАДАНИЕ №1 (8)

Для сигнализации на складе установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при необходимости первое устройство сработает, составляет 95%, для второго и третьего устройства эти вероятности равны соответственно 75% и 70%. Найти вероятность того, что в случае необходимости сработают:

а) все устройства;

б) только одно устройство;

в) хотя бы одно устройство.

Решение:

	вероятность, что сработает:	вероятность того что не сработает:
1 устройство:	p_1=0,95	$\overline{p_1} = 1 - p_1 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$
2 устройство:	p_2=0,75	$\overline{p_2} = 1 - p_2 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$
3 устройство:	p_3=0,7	$\overline{p_3} = 1 - p_3 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

a) A = { сработают все три устройства}

P(A)=$p_1 * p_2 * p_3 = 0{,}95 * 0{,}75 * 0{,}7 = 0{,}499$

b) B={сработает только одно устройство}

B_1={сработает первое устройство} P(B_1)= $p_1 * \overline{p_2} * \overline{p_3}$
B_2={сработает второе устройство} P(B_2)= $\overline{p_1} * p_2 * \overline{p_3}$
B_3={сработает третье устройство} P(B_3)= $\overline{p_1} * \overline{p_2} * p_3$

P(B)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)= $p_1 * \overline{p_2} * \overline{p_3} + \overline{p_1} * p_2 * \overline{p_3} + \overline{p_1} * \overline{p_2} * p_3 = 0{,}95 * 0{,}25 * 0{,}3 + 0{,}05 * 0{,}75 *$
$* 0{,}3 + 0{,}05 * 0{,}25 * 0{,}7 = 0{,}091$

c) C={сработает хотя бы одно устройство}

Противоположное ему событие: $\overline{C}$={ни одно устройство не сработает}

P($\overline{C}$)= $\overline{p_1} * \overline{p_2} * \overline{p_3} = 0{,}05 * 0{,}25 * 0{,}3 = 0{,}004$
P(C)=1−P($\overline{C}$)= $1 - 0{,}004 = 0{,}996$

Ответ: а) 0,499 б) 0,091 в) 0,996

ЗАДАНИЕ №2 (16)

В партии, состоящей из 45 одинаково упакованных изделий, смешаны изделия двух сортов, причем 15 из этих изделий – первого сорта, а остальные изделия – второго сорта. Найти вероятность того, что взятые наугад два изделия окажутся:

а) одного сорта;

б) разных сортов.

Решение:

Итак, мы имеем 45 изделий : 15 – первого сорта , 30 – второго сорта.

а) Событие A={выбраны изделия одного сорта}

Здесь может быть два случая :

A_1={выбраны изделия первого сорта} A_2={выбраны изделия второго сорта}

P(A_1)=$\frac{C_{15}^2 \cdot C_{30}^0}{C_{45}^2} = \frac{15!\cdot 30!\cdot 2!\cdot 43!}{2!\cdot 13!\cdot 0!\cdot 30!\cdot 45!} = \frac{15!\cdot 43!}{13!\cdot 45!} = \frac{14\cdot 15}{44\cdot 45} = \frac{7}{66}$=0,106

P(A_2)=$\frac{C_{15}^0 \cdot C_{30}^2}{C_{45}^2} = \frac{15!\cdot 30!\cdot 2!\cdot 43!}{0!\cdot 15!\cdot 2!\cdot 28!\cdot 45!} = \frac{30!\cdot 43!}{28!\cdot 45!} = \frac{29\cdot 30}{44\cdot 45} = \frac{29}{66}$=0,439

Применяя теорему сложения несовместных событий, получим:

P(A)=P(A_1)+P(A_2) = $0{,}106 + 0{,}439 = 0{,}545$

б) Пусть В={выбраны изделия разных сортов}

Это событие является противоположным событию А, т.е. $B = \overline{A}$. Зная, что противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице, вычислим:

$$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}545 = 0{,}455$$

или же

$$P(B)=\frac{C_{15}^1 \cdot C_{30}^1}{C_{45}^2}=\frac{15!\cdot 30!\cdot 2!\cdot 43!}{1!\cdot 14!\cdot 1!\cdot 29!\cdot 45!}=\frac{15\cdot 30\cdot 2}{44\cdot 45}=0{,}455$$

Ответ: а) 0,545 б) 0,455

ЗАДАНИЕ №3 (25)

В данный район изделия поставляются двумя фирмами их объем находится в соотношении 5:8. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, у второй фирмы этот показатель 85%.

а) Какова вероятность, что взятое наугад изделие оказалось стандартным?

б) Взятое наугад изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно изготовлено первой фирмой?

Решение:

По условии:

H_1={изготовлено 1 фирмой} $P(H_1)={}^5/_{13}$

H_2={изготовлено 2 фирмой} $P(H_2)={}^8/_{13}$

А={изделие стандартное} $P(A/H_1) = 0{,}9$

$P(A/H_2) = 0{,}85$

а) Используя формулу полной вероятности, находим вероятность того, что взятое наугад изделие окажется стандартным:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1)+P(H_2) \cdot P(A/H_2) =\frac{5}{13}\cdot 0{,}9+\frac{8}{13}\cdot 0{,}85=0{,}869$$

б) Взятое наугад изделие оказалось стандартным. Найдем по формуле Байеса вероятность того, что оно изготовлено первой фирмой:

$$P(H_1/A)= \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{13}\cdot 0{,}9}{0{,}869} = \frac{0{,}346}{0{,}869} = 0{,}398$$

Ответ: а) 0,869 б) 0,398

ЗАДАНИЕ №4 (37)

Вероятность того, что в результате проверки изделию будет присвоен знак «изделие высшего качества» равна 0,5.

1) На контроль поступило 7 изделий. Какова вероятность того, что знак высшего качества будет присвоен:

   а) ровно 3 изделиям;

   б) более чем 4 изделиям;

   в) хотя бы одному изделию;

   г) указать наивероятнейшее количество изделий, получивших знак высшего качества, и найти соответствующую ему вероятность.

2) При тех же условиях найти вероятность того, что в партии из 36 изделий знак высшего качества получает:
а) ровно половина изделий;
б) не менее чем 15, но не более, чем 30 изделий.

Решение:

1) Вероятность того, что будет присвоен знак высшего качества по условии равна p=0,5. Тогда вероятность того, что знак не будет присвоен q=1-0,5=0,5

а) A={ровно 3 изделиям будет присвоен знак высшего качества}
По формуле Бернулли, находим:
P(A)=$P_7(3) = C_7^3 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^4 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 5 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{35}{128} = 0{,}273$

б) B={более чем 4 изделиям будет присвоен знак высшего качества }
B_1={5 изделиям}
B_2={6 изделиям}
B_3={7 изделиям}
P(B)=P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) $= C_7^5 \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^2 + C_7^6 \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}5^1 + C_7^7 \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5^0 = \ = \frac{7!}{5!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{7!}{6!\cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{7!}{7!\cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} \cdot (21 + 7 + 1) = \frac{29}{128} = 0{,}227$

в) C={хотя бы одному изделию}
$\overline{C}$={ни одному изделию}
P$(\overline{C}) = C_7^0 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^7 = 0{,}008$
P$(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$

г) наивероятнейшее количество изделий, получивших знак высшего качества, найдем из неравенства:
$$np - q \le H_0 \le np + q$$
$$7 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \le H_0 \le 7 \cdot 0{,}5 + 0{,}5$$
$$3 \le H_0 \le 4$$
Отсюда следует, что наивероятнейшие количество изделий это 3 и 4, их вероятности равны:
P (H_0)=$P_7(3)$=$P_7(4)$=$C_7^4 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^4$=$C_7^3 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^4$=$\frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$=0,273

2) По условии n=36 p=0.5 q=1-0.5=0.5

а) A={ровно половина }

k=$\frac{36}{2}$=18

Находим по дифференциальной формуле Муавра – Лапласа:

$$P(m,n)=\frac{1}{\sqrt{npq}} f(x), \qquad \text{где} \quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

Значит

$$\sqrt{npq}=\sqrt{36\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5} = 3 \qquad x=\frac{18-36\cdot 0{,}5}{3}=0$$

Найдя из таблицы $f(0) = 0{,}39894$ получаем $P_{36}(18) = \frac{0{,}39894}{3} = 0{,}133$

б) Применяем интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P(a \le m \le b) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \text{где} \quad x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = -\frac{b-np}{\sqrt{npq}}$$

Тогда $x_1 = \frac{30-36\cdot 0{,}5}{3} = 4, \quad x_2 = -\frac{15-36\cdot 0{,}5}{3} = -1$

Используя таблицу $\Phi(x)$ получаем:

$$P_{36}(15 \le m \le 30) = \Phi(4) - \Phi(-1) = \Phi(4) + \Phi(1) = 0{,}499968 + 0{,}3413 = 0{,}841232 = 0{,}841$$

Ответ: 1. а)0,273 б) 0,227 в) 0,992 г) 3 и 4; 0,273 2. а) 0,133 б) 0,841

ЗАДАНИЕ №5 (44)

В лотерее на каждые 100 билетов приходится m_1 билетов с выигрышем a_1 тыс. рублей, m_2 билетов с выигрышем a_2 тыс. рублей, m_3 билетов с выигрышем a_3 тыс. рублей и т.д. Остальные билеты из сотни не выигрывают.

$a_1=16$; $a_2=10$; $a_3=6$; $a_4=3$; $a_5=2$; $a_6=1$;

$m_1=2$; $m_2=5$; $m_3=8$; $m_4=10$; $m_5=15$; $m_6=20$.

Составить закон распределения величины выигрыша для владельца одного билета и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Пояснить смысл указанных характеристик.

Решение:

Согласно закону распределения x принимает значения: $x_1 = 0$ - невыигрышный билет, $x_2 = 1$ - выигрыш в 1 тыс руб., $x_3 =$ в 2 тыс. руб., $x_4 = 3$ тыс. руб., $x_5 = 6$ тыс. руб, $x_6 = 10$ тыс. руб. и $x_7 = 16$ тыс. руб.

Соответствующие вероятности будут:
$p_2 = \frac{20}{100} = 0{,}2$ (где 20 - число выигрышей по 1 тыс. руб., а 100 - общее количество билетов); $p_3 = \frac{15}{100} = 0{,}15$; $p_4 = \frac{10}{100} = 0{,}1$; $p_5 = \frac{8}{100} = 0{,}08$; $p_6 = \frac{5}{100} = 0{,}05$; $p_7 = \frac{2}{100} = 0{,}02$.
$p_1 = 1 - \sum_{i=2}^{7} p_i = 1 - 0{,}2 - 0{,}15 - 0{,}1 - 0{,}08 - 0{,}05 - 0{,}02 = 0{,}4$.

x_i	0	1	2	3	6	10	16
p_i	0,4	0,2	0,15	0,1	0,08	0,05	0,02

$M(x) = \sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 0\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}15 + 3\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}08 + 10\cdot 0{,}05 + 16\cdot 0{,}02 = 2{,}1$.

$D(x) = \sum_{i=1}^{7}(x_i - M(x))^2 p_i = (0-2{,}1)^2 \cdot 0{,}4 + (1-2{,}1)^2 \cdot 0{,}2 + (2-2{,}1)^2 \cdot 0{,}15 +$
$+(3-2{,}1)^2 \cdot 0{,}1 + (6-2{,}1)^2 \cdot 0{,}08 + (10-2{,}1)^2 \cdot 0{,}05 + (16-2{,}1)^2 \cdot 0{,}02 = 10{,}29$.

$\delta = \sqrt{D} = \sqrt{10{,}29} = 3{,}208$.

Ответ: 2,1; 10,29; 3,208

ЗАДАНИЕ №6 (59)

Вес изготовленного серебряного изделия должен составлять а граммов.

При изготовлении возможны случайные погрешности, в результате которых вес изделия случаен, но подчинен нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением σ граммов.

Требуется найти вероятность того, что:

а) вес изделия составит от α до β граммов;

б) величина погрешности в весе не превзойдет δ граммов по абсолютной величине.

а=140; σ=6; α=130; β=155; δ=14

Решение:

а) $P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mathrm{a}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mathrm{a}}{\sigma}\right)$

$P(130 < x < 155) = \Phi\left(\frac{155-140}{6}\right) - \Phi\left(\frac{130-140}{6}\right) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}67) = 0{,}4938 + 0{,}4525 =$
$= 0{,}9463$

б) $P(|x - 140| < 14) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{14}{6}\right) = 2\Phi(2{,}33) = 2 \cdot 0{,}4901 = 0{,}9802$

Ответ: а) 0,9463 б) 0,9802

ЗАДАНИЕ №7 (62)

По итогам выборочных обследований для некоторой категории сотрудников величина их дневного заработка Х руб. и соответствующее количество сотрудников n_i представлены в виде интервального статистического распределения.

а) Построить гистограмму относительных частот распределения.

б) Найти основные характеристики распределения выборочных данных: среднее выборочное значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам.

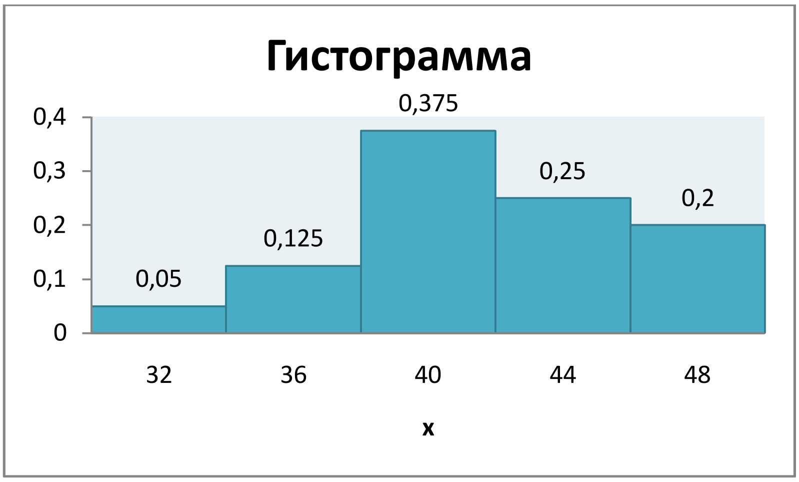
г) Считая, что значения признака Х в генеральной совокупности подчинены нормальному закону распределения, найти доверительный интервал для оценки математического ожидания (генерального среднего значения) с надежностью γ, считая, что генеральная дисперсия равна исправленной выборочной дисперсии.

x	30-34	34-38	38-42	42-46	46-50	
n_i	2	5	15	10	8	γ = 0,90

Решение:

а)

x		n_i	n_i/n
30	34	2	0,050
34	38	5	0,125
38	42	15	0,375
42	46	10	0,250
46	50	8	0,200
$\sum$		40	



б)
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, n_i = \frac{1}{40}(32 \cdot 2 + 36 \cdot 5 + 40 \cdot 15 + 44 \cdot 10 + 48 \cdot 8) = \frac{1}{40}(64 + 180 + 600 + 440 + 384) = \frac{1}{40} \cdot 1668 = 41{,}7$

$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - \bar{x})^2\, n_i = \frac{1}{40}((32 - 41{,}7)^2 \cdot 2 + (36 - 41{,}7)^2 \cdot 5 + (40 - 41{,}7)^2 \cdot 15 + (44 - 41{,}7)^2 \cdot 10 + (48 - 41{,}7)^2 \cdot 8) = \frac{1}{40}((-9{,}7)^2 \cdot 2 + (-5{,}7)^2 \cdot 5 + (-1{,}7)^2 \cdot 15 + (2{,}3)^2 \cdot 10 + (6{,}3)^2 \cdot 8) = \frac{1}{40}(188{,}18 + 162{,}45 + 43{,}35 + 52{,}9 + 317{,}52) = \frac{764{,}4}{40} = 19{,}11$

$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2} = \sqrt{19{,}11} = 4{,}37$

в) $S^2 = \frac{n}{n-1}\bar{S}^2 = \frac{40}{39} \cdot 19{,}11 = 19{,}6 \quad \sigma = \sqrt{S} = 4{,}43$

г) $\gamma = 0{,}9$
Найдем t. Из соотношения $2\Phi(t) = 0{,}9$ получим $\Phi(t) = 0{,}45$. И по таблице $t = 1{,}65$

$\sigma = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}65 \cdot 4{,}43}{6{,}32} = 1{,}16$
$\bar{x} - \sigma \le M(x) \le \bar{x} + \sigma$
$\bar{x} - 1{,}16 = 41{,}7 - 1{,}16 = 40{,}54 \qquad \bar{x} + 1{,}16 = 41{,}7 + 1{,}16 = 42{,}86$

Ответ: $M(x) \epsilon (40{,}54; 42{,}86)$

ЗАДАНИЕ №8 (75)

С целью анализа взаимного влияния прибыли предприятия и его издержек выборочно были проведены наблюдения за этими показателями в течение ряда месяцев: X – величина месячной прибыли в тыс. руб., Y – месячные издержки в процентах к объему продаж.

Результаты выборки сгруппированы и представлены в виде корреляционной таблицы, где указаны значения признаков X и Y и количество месяцев, за которые наблюдались соответствующие пары значений названных признаков.

а) По данным корреляционной таблицы найти условные средние $\bar{x}_y$ и $\bar{y}_x$.

б) Оценить тесноту линейной связи между признаками X и Y.

в) Составить уравнения линейной регрессии Y по X и X по Y .

г) Сделать чертеж, нанеся на него условные средние и найденные прямые регрессии.

д) Оценить силу связи между признаками с помощью корреляционного отношения.

Y \ X	25	35	45	55	65	n_y
12	2					2
17	4	6				10
22		3		2		5
27			5	6	2	13
32			4	1	4	9
37					3	3
n_x	6	9	9	9	9	42

$\bar{x}_{cp}|(Y=12)=25$ $\bar{x}_{cp}|(Y=17)=31$ $\bar{x}_{cp}|(Y=22)=43$ $\bar{x}_{cp}|(Y=27)=52{,}69$
$\bar{x}_{cp}|(Y=32)=55$ $\bar{x}_{cp}|(Y=37)=65$

$\bar{y}_{cp}|(X=25)=15{,}33$ $\bar{y}_{cp}|(X=35)=18{,}67$ $\bar{y}_{cp}|(X=45)=29{,}22$ $\bar{y}_{cp}|(X=55)=26{,}44$
$\bar{y}_{cp}|(X=65)=32{,}56$

Максимальная частота $n_{xy}=6$, по ней найдем значения констант c_1 и c_2: соответствующее значение x_i есть $c_1=35$, а соответствующее значение y_i есть $c_2=17$ Шаги таблицы для X и Y таковы: $k_1=10,\ k_2=5$.

Y	X	25	35	45	55	65	$n_y n_u$		
u	v	-1	0	1	2	3		I	II
	12	2							
	-1	1					2	2	
	17	4	6						
	0	0	0				10	III	IV
	22		3		2				
	1		0		2		5		4
	27			5	6	2			
	2			2	4	6	13		46
	32			4	1	4			
	3			3	6	9	9		54
	37					3			
	4					12	3		36
$n_x n_v$		6	9	9	9	9	42		
I		2	II					2	
III			IV	22	34	84			140

$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i n_u = \frac{1}{42}(-1\cdot 2 + 0\cdot 10 + 1\cdot 5 + 2\cdot 13 + 3\cdot 9 + 4\cdot 3) = 1{,}619$

$\bar{v} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} v_i n_v = \frac{1}{42}(-1\cdot 6 + 0\cdot 9 + 1\cdot 9 + 2\cdot 9 + 3\cdot 9) = 1{,}143$

$\overline{u^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} {u_i}^2 n_u = \frac{1}{42}(1\cdot 2 + 0\cdot 10 + 1\cdot 5 + 4\cdot 13 + 9\cdot 9 + 16\cdot 3) = 4{,}476$

$\overline{v^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} {v_i}^2 n_v = \frac{1}{42}(1\cdot 6 + 0\cdot 9 + 1\cdot 9 + 4\cdot 9 + 9\cdot 9) = 3{,}143$

$\bar{S}_u = \sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = \sqrt{4{,}476 - 1{,}619^2} = \sqrt{1{,}855} = 1{,}362$
$\bar{S}_v = \sqrt{\overline{v^2} - \bar{v}^2} = \sqrt{3{,}143 - 1{,}143^2} = \sqrt{1{,}836} = 1{,}355$

$\overline{uv} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} u_i v_i n_{uv} = (2\cdot 1 + 4\cdot 0 + 6\cdot 0 + 3\cdot 0 + 2\cdot 2 + 5\cdot 2 + 6\cdot 4 + 2\cdot 6 + 4\cdot 3 + 1\cdot 6 + 4\cdot 9 + 3\cdot 12) = 142$

$r = \frac{\overline{uv} - n\cdot\bar{u}\cdot\bar{v}}{n\cdot\bar{S}_u\cdot\bar{S}_v} = \frac{142 - 42\cdot 1{,}619\cdot 1{,}143}{42\cdot 1{,}362\cdot 1{,}355} = 0{,}829$ => по свойству коэффициента корреляции можно сделать вывод о том, что неизвестные x и y имеют между собой сильную линейную связь.

$\bar{x} = \bar{u}\cdot k_1 + c_1 = 1{,}619\cdot 10 + 35 = 51{,}19$ $\quad \bar{y} = \bar{v}\cdot k_2 + c_2 = 1{,}143\cdot 5 + 17 = 22{,}715$

$\bar{S}_x = \bar{S}_u\cdot k_1 = 1{,}362\cdot 10 = 13{,}62$
$\bar{S}_y = \bar{S}_v\cdot k_2 = 1{,}355\cdot 5 = 6{,}776$

$\alpha_1 = r\frac{\bar{S}_y}{\bar{S}_x} = 0{,}829\cdot\frac{6{,}776}{13{,}62} = 0{,}413$ $\quad \alpha_0 = \bar{y} - \alpha_1\bar{x} = 22{,}715 - 0{,}413\cdot 51{,}19 = 1{,}593$
$\beta_1 = r\frac{\bar{S}_x}{\bar{S}_y} = 0{,}829\cdot\frac{13{,}62}{6{,}775} = 1{,}667$ $\quad \beta_0 = \bar{y} - \beta_1\bar{x} = 51{,}19 - 1{,}667\cdot 22{,}715 = 13{,}333$

$y = 0{,}413x + 1{,}593$
$x = 1{,}667y + 13{,}333$