

Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{-5+x^2}{x-3}$$

(1) Область определения: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$
 $x=3$ - точка разрыва

(2) Иссл. поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{-5+x^2}{x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{-5+x^2}{x-3} = +\infty$$

Прямая $x=3$ - вертикальная асимптота

(3) Проверим функцию на четность, нечетность

$$f(-x) = \frac{-5+(-x)^2}{(-x)-3} = \frac{-5+x^2}{-x-3}, \text{ т.к. } f(x) \neq f(-x) \text{ - функция не явл-ся ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.}$$

(4) Периодичность функции

(5) Найдем точки пересечения графика функ-ии с осью координат с ОУ: $x=0$, где $y = \frac{5}{3}$ $(0; \frac{5}{3})$

(6) Найдем наклонные асимптоты: $y=kx+b$

(7) Точки экстремума и промежутки монотонности:

$$y' = \left(\frac{-5+x^2}{x-3} \right)' = \frac{(-5+x^2)'(x-3) - (-5+x^2)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-3)+5-x^2}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x+5-x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$$

$y' = 0$, где $x_1 = 5$; $x_2 = 1$

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; 5)$	5	$(5; +\infty)$
y'	+	0	-	не сущ.	-	0	+
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	не сущ.	$\searrow$	10	$\nearrow$

Функ-я возрастает:
 $(-\infty; 1), (5; +\infty)$
 Функ-я убывает:
 $(1; 3), (3; 5)$

$$y_{\max} = y(1) = 2 \quad y_{\min} = y(5) = 10$$

(8) Точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функ-ии

Точки перегиба $y=f(x)$:

$$y'' = \left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} \right)' = -\frac{10}{(x-3)^3}$$

y'' не сущ-ет при $x=3$

x	$(-\infty; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y''	-	не сущ.	+
y	$\cap$	не сущ.	$\cup$

Функ-я явл-ся выпуклой ($\cap$) на интервале $(-\infty; 3)$
 вогнутой ($\cup$) на $(3; +\infty)$